DS D'INFORMATIQUE – SUJET 0

Calculatrices interdites.
Le sujet est à compléter directement et à rendre en même temps que la copie.
Toute fonction introduite au cours de l'énoncé ou dans votre copie peut être réutilisée dans les questions suivantes.
Lorsque vous rédigez ou complétez un script Python, `écrivez les caractères comme ceci.`

Ce sujet 0 ne contient qu'un seul exercice, calibré pour une durée **d'une heure**. Le sujet réel sera environ deux fois plus long.

Exercice 1 – Calcul des coefficients binomiaux

Par convention, on suppose que

$$(Z): \quad \forall k,n \in \mathbb{N} \quad k > n \implies \binom{n}{k} = 0$$

Étant donné deux entiers $K, N \in \mathbb{N}$, on étudie une fonction `binom(K,N)` qui calcule $\binom{N}{K}$ à partir des relations suivantes :

$$(I): \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \binom{n}{0} = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \binom{0}{k} = 0$$

$$(R): \quad \forall k,n \in \mathbb{N} \qquad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Dans tout ce devoir, on s'interdit d'utiliser l'expression explicite de $\binom{n}{k}$: on ne peut utiliser que les relations (I) et (R) pour effectuer des calculs. À noter : cela n'inclut pas (Z).

1. Compléter le tableau suivant avec les valeurs de $\binom{n}{k}$:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

2. Expliquer (sans faire de démonstration rigoureuse) comment remplir ce tableau uniquement à partir des relations (I) et (R).

Dans la fonction `binom(N,K)`, on construit un tableau 2D appelé `T`, de sorte que `T[n,k]` contient la valeur $\binom{n}{k}$.

3. Compléter la fonction `binom` ci-dessous.

```
import numpy as np
def binom(K,N):     # calcule le coefficient "K parmi N"
    if K>N:
        return 0
    else:
        T = np.zeros( (N+1,N+1) )   # tableau de taille (N+1)×(N+1) rempli de zéros

        for ... in range(.....):    # On remplit d'abord T avec la formule (I)
            T[n,0]  = 1
            # T[0,k] vaut déjà 0 pour k≥1

        for ... in range(.....):    # On remplit ensuite T avec la formule (R)
            for ... in range(.....):
                T[n+1,k+1] = T[n,k] + T[n,k+1]

        return T[N,K]
```

4. Rappeler la définition d'une opération élémentaire (telle que vue en TP).

Dans toute la suite de ce devoir, pour simplifier, on considérera que chaque application de la formule (R), pour des valeurs de k et n fixées, constitue UNE opération élémentaire. On négligera toutes les autres opérations élémentaires dans le calcul de la complexité.

5. Quelle est la complexité de la fonction `binom` ci-dessus en fonction de l'argument `N` ? Justifier.
6. Montrer par récurrence qu'on peut calculer $\binom{N}{1}$ avec seulement N opérations élémentaires.
7. On souhaite calculer $\binom{4}{3}$. Sans justifier, combien faut-il d'opérations élémentaires *au minimum* ? Sur le tableau page précédente, entourer chaque valeur intermédiaire $\binom{n}{k}$ qui a été calculée avec la formule (R) pour aboutir au calcul de $\binom{4}{3}$.

Au vu des questions 5 à 7, il apparait que l'instruction `binom(K,N)` réalise plus d'opérations élémentaires que nécessaire. On cherche à diminuer le nombre d'opérations élémentaires par diverses améliorations.

8. On propose de modifier la ligne 15 du script ci-dessus. Quatre propositions sont retenues :

   $a)$ `for k in range(K-1):` $c)$ `for k in range(K+1):`

   $b)$ `for k in range(K):` $d)$ `for k in range(n):`

   Une seule de ces propositions donne le résultat correct pour `binom(K,N)` pour tout couple (K,N). Laquelle (sans justifier) ?

9. Vérifier brièvement que l'instruction `binom(1,N)` réalise N opérations élémentaires.

On suppose à présent qu'on peut utiliser la relation (Z) en plus des relations (I) et (R).

10. Refaire la question 7 : on reproduira le tableau sur la copie en entourant les valeurs concernées.
11. Donner sans justifier une modification de la ligne 15 pour faire encore moins d'opérations élémentaires.

    Bonus (difficile) : il est également possible d'améliorer la ligne 15 d'une autre façon : voir la question 7.

FIN DU SUJET

Note : on pourrait croire que cet exercice est bien inutile puisqu'on connait la définition explicite de $\binom{N}{K}$... Néanmoins, si on pose $u_{k,n} = \binom{n}{k}$ le terme général d'une suite à double indice $(u_{k,n})_{k,n\in\mathbb{N}}$, on voit que (I) et (R) se réécrivent

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N} & u_{k,0} = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{0,n} = 1 \\ \forall k,n \in \mathbb{N} & u_{k+1,n+1} = u_{k,n} + u_{k+1,n} \end{cases}$$

et comme à aucun endroit on a utilisé l'expression explicite de $u_{k,n}$, on peut facilement généraliser les résultats obtenus à un cadre beaucoup plus large :

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N} & u_{k,0} \in \mathbb{R} \text{ donné} \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{0,n} \in \mathbb{R} \text{ donné} \\ \forall k,n \in \mathbb{N} & u_{k+1,n+1} = f(u_{k,n}, u_{k+1,n}) \end{cases}$$

avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque.